수학과 물리학

~ 영원한 동반자

지 동 표 명예교수

서울대 수리과학부

UNIST 인문학부

"**Physics** is best way of uniting **Mathematics**."

"**Mathematics** is best way of uniting **Physics**."

◆ Nobel Prize in Physics (1965)

"for their fundamental work in quantum electrodynamics, with deep-ploughing consequences for the physics of elementary particles".

Sin-Itiro Tomonaga
(JAP, 1906-1979)

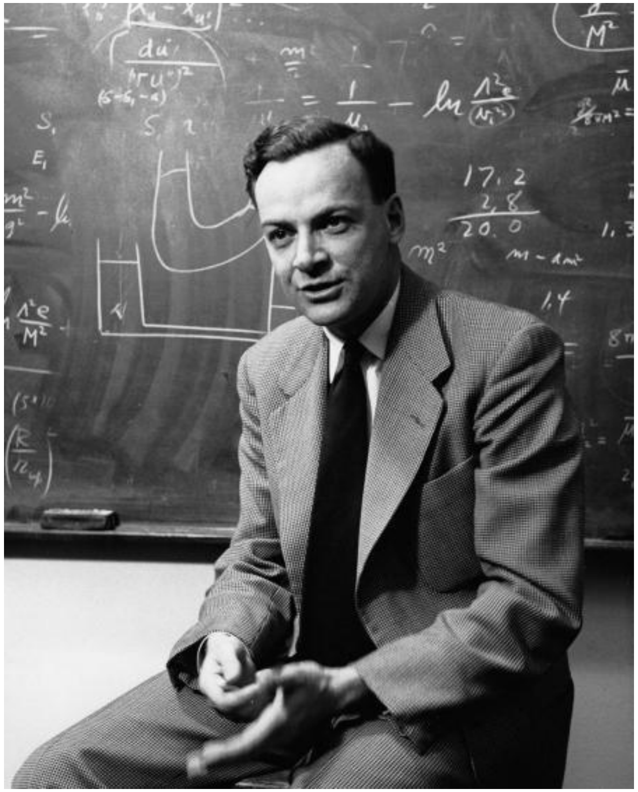
Julian Schwinger
(US, 1918-1994)

Richard Feynman
(US, 1918-1988)

“수학이 없어지면 6일 후에 모든 물리도 없어진다.”

“수학을 모르면 물리의 아름다움을 느낄 수 없다.”

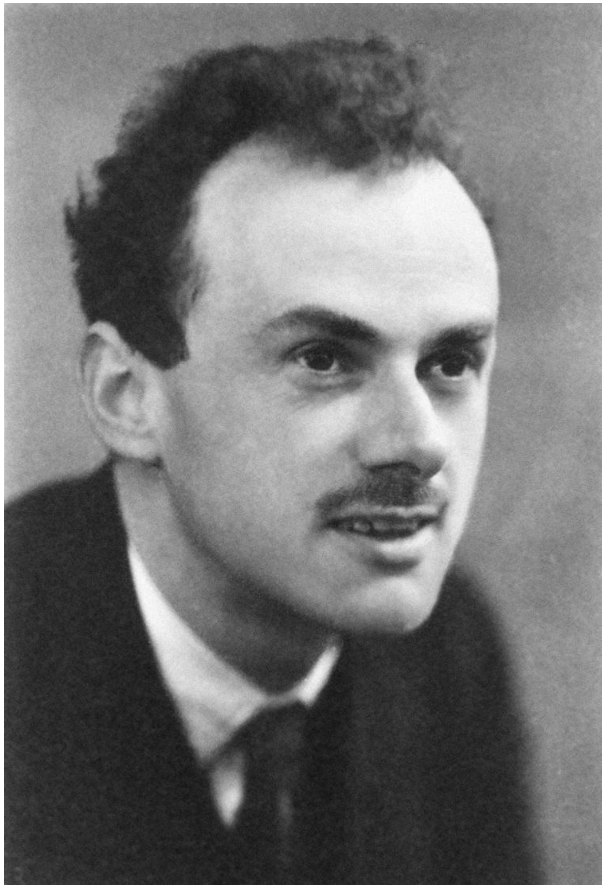
- R. P. Feynman



◆ **Nobel Prize in Physics** (1933)

"for the discovery of new productive forms of atomic theory"

Erwin Schrödinger
(AUS, 1887-1961)



Paul A.M. Dirac
(UK, 1902-1984)

◆ DIRAC의 1936년 연설

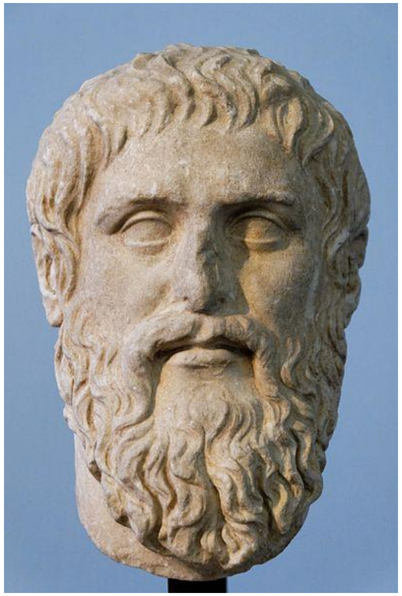
1. 수학과 물리의 관계 : 피상적 (수학이 물리의 표현 도구)인 것보다 훨씬 심오하다.
2. Simplicity보다 mathematical beauty를 강조
3. 수학과 물리가 하나가 되어 순수 수학의 모든 분야가 물리적 응용이 있고, 이의 물리에서의 중요도는 이의 수학에서의 흥미도와 일치하는 세상

◆ DIRAC의 1936년 연설 (계속)

4. 방정식 자체보다는 변환이 중요하다.
5. 양자역학이 우주의 현재 모습을 만들어 주었다.
6. 아마 수학과 물리가 하나가 되어 모든 자연을 자연수에 대응시키려 한 고대 철학자의 꿈이 이루어질지도 모른다.

◆ (옛날에) **PLATO'**S STANDARD MODEL

5 = 4 + 1



정육면체 ⟷ **땅**

정사면체 ⟷ **불**

정12면체 ⟷ **Universe Quintessence (에테르)**

정20면체 ⟷ **물**

정8면체 ⟷ **공기**

◆ 역학

F = *m***a** 와 만유인력 $\xrightarrow[\text{calculus}]{}$ **Kepler의 제 3 법칙**

(1) 행성궤도는 타원

(2) 면적 속도는 일정

(3) 주기의 제곱은 장축의 세제곱에 비례

지구 궤도의 안정성 ➡ **Poincaré**에 의한 Dynamical System 이론 탄생

➡ Kolmogoroff-Arnold-Moser (**KAM**) 이론

이는 거꾸로 **핵융합로 Tokamak의 안정성에 대한 이론적 기반**을 줌.

다른 한편으로는 Chaos 이론, Discrete Dynamical System

Johannes Kepler
(ITA, 1571–1630)

Joules Henri Poincaré
(FRA, 1854–1912)

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 의 일반화

- **Lagrangian** 역학

$$\mathcal{S} := \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) d^{\mathrm{d}} x \quad \text{가 최소}$$

action

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) = 0$$

Euler-Lagrange Eq.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \quad \text{일때} \qquad m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

거의 모든 현대 물리는 LAGRANGIAN으로 표현

- **Feynman** 의 path integral :

$$\int D\varphi \; e^{-i\int \mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)d^{\mathrm{d}}x}$$

- **일반상대성 이론** $\mathcal{S} = \int RdV$ R : scalar curv.

Einstein-Hilbert Eq. $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R \cdot g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$

- **전자기학**

$$\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \int \tfrac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2$$

NOETHER의 정리

- $\mathcal{S} = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) d^{\mathrm{d}} x$ 가 continuous symmetry 를 가지면 **불변량**이 있다. $(\partial_\mu J^\mu = 0)$
  20세기 과학철학에 가장 중요한 업적 (Einstein 말씀)

  특별히 쉬운 경우, $\mathcal{L}(Q(s,t), \dot{Q}(s,t), t)$ 가 ind. of s

$$0 = \frac{d\mathcal{L}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q}\frac{dQ}{ds} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\frac{d\dot{Q}}{ds} \quad \text{그런데} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\right)$$

$$\therefore \frac{d\mathcal{L}}{ds} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial Q}{\partial s}\right] = 0 \quad \therefore \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial Q}{\partial s} = P\frac{\partial Q}{\partial s}$$ 가 **불변량**

- e.g.: $\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^+ \partial_\mu \psi - m^2 \psi^+ \psi^- + g(\psi^+ \psi^-)^2$

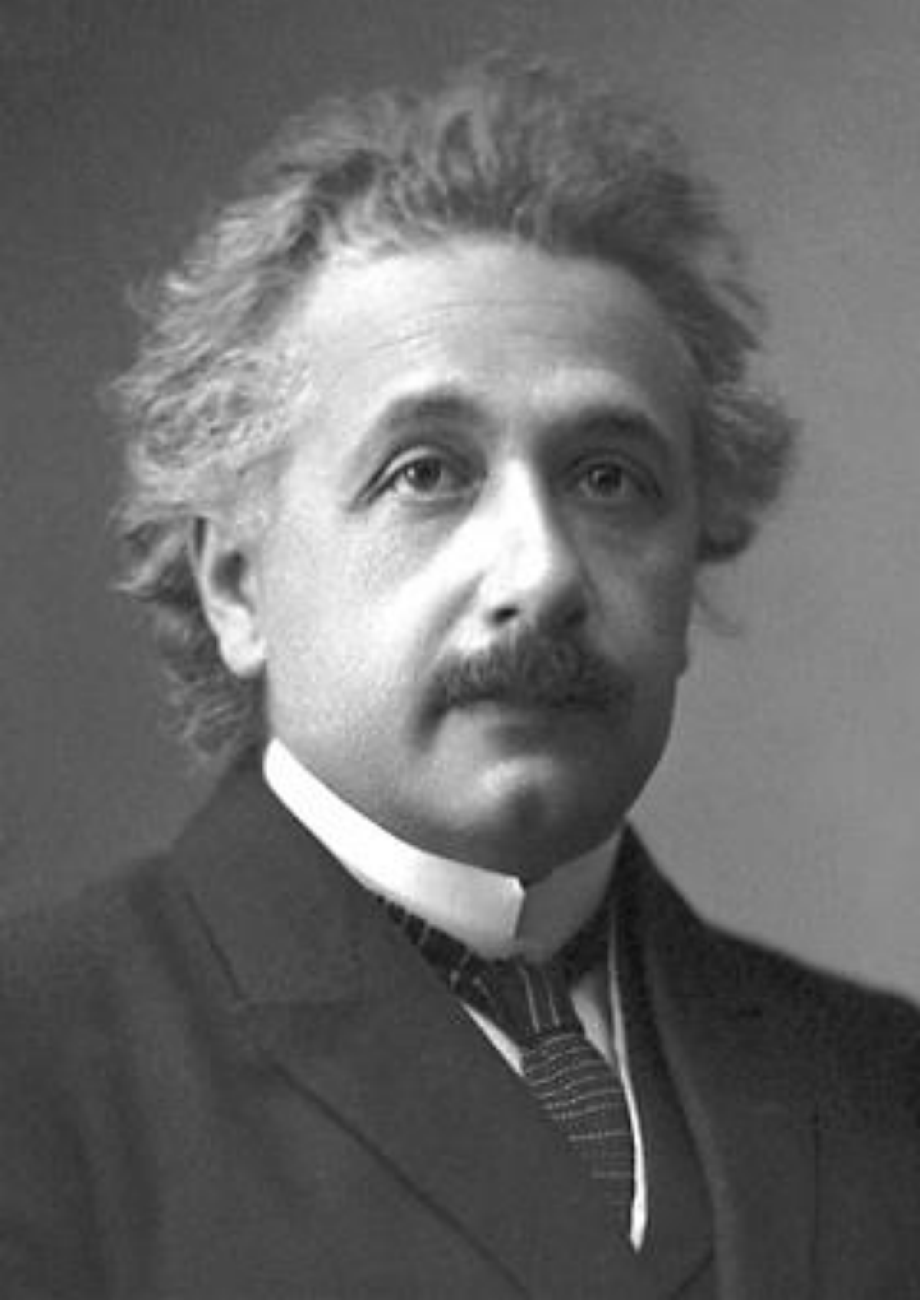
$$\psi \to e^{is}\psi$$

EINSTEIN의 GENERAL RELATIVITY

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda \cdot g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

리이만 기하

- **Noether** 정리는 Bryant-Griffith에 의하여 더 일반화



Albert Einstein

(DEU/USA, 1879-1955)

- ▶ Nobel Prize in Physics (1921)
- ❖ Photoelectric Effect (9 June 1905)

- ❖ Brownian Motion (18 July 1905)
  Movement of pollen grains in water
- ❖ Special Relativity (26 Sep 1905)
- ❖ Mass-Energy Equivalence
  $E = mc^2$ (21 Nov 1905)

- ◆ 1905 Einstein's
  "*Annus Mirabilis*"
  "*Wunderjahr*"
  "*Miracle Year*"

100 years later…

IUPAP

World Year of
PHYSICS
2005

Light cone diagram
used in special relativity

Lagrangian Mechanics와 Hamiltonian Mechanics

$$p := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, \qquad H = p\dot{q} - \mathcal{L} \quad \text{(Legendre transform)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Euler-Lagrange eq.
partial **d**ifferential **e**q.

Hamilton eq.
ordinary **d**ifferential **e**q.

- **Hamilton-Jacobi-Bellman** eq. (optimal control)

- Symplectic geometry

◆ 열역학 (Thermodynamics)

➢ 열역학 3 법칙

(1법칙) 에너지 보존 법칙: $dE = dQ - dW$

(2법칙) 우주의 엔트로피 (S)는 증가한다.

(찬데서 뜨거운데로 열이 공짜로 전달되지 않는다.)

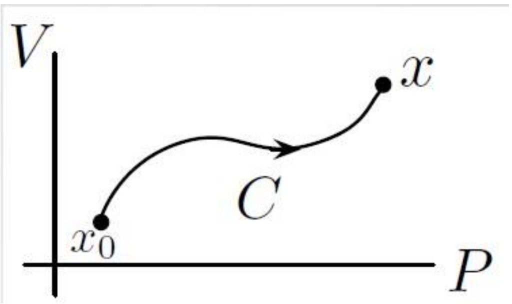
(3법칙) 절대 0° 로 유한 번에 도착할 수 없다.

(0 법칙) A와 B가 균형, B와 C가 균형 ⟶ A와 C가 균형

(온도의 정의, 존재)

❖ **굉장히 공리적! 따라서 다른 물리 이론에 우선한다.**

◆ 제2법칙, Entropy, S



➢ 열역학적 Entropy (Clausius)

$$\Delta S = \int_C \frac{dQ}{T}$$

C: reversible

C: 기준점 x_0 에서 x 까지의 경로

➢ 통계적 Entropy는 매우 신비 (Boltzmann)

$$S = k \log W$$

W: 가능한 미시 경우의 수

❖ 통계적 Entropy의 microscopic 이해

$$H = -\sum_i p_i \log p_i$$ 로 정의되는 Shannon entropy 탄생의 기반

- **Entropy 개념은 많은 수학에서 중요한 역할**

  Shock wave, Ricci flow …

  (Singularity가 형성될 때, 그곳을 지나서 해의 선택)

- **Ergodic theory의 기반**

  - Discrete dynamical system
  - Tao 등에 의한 prime number의 분포에 관한 수학

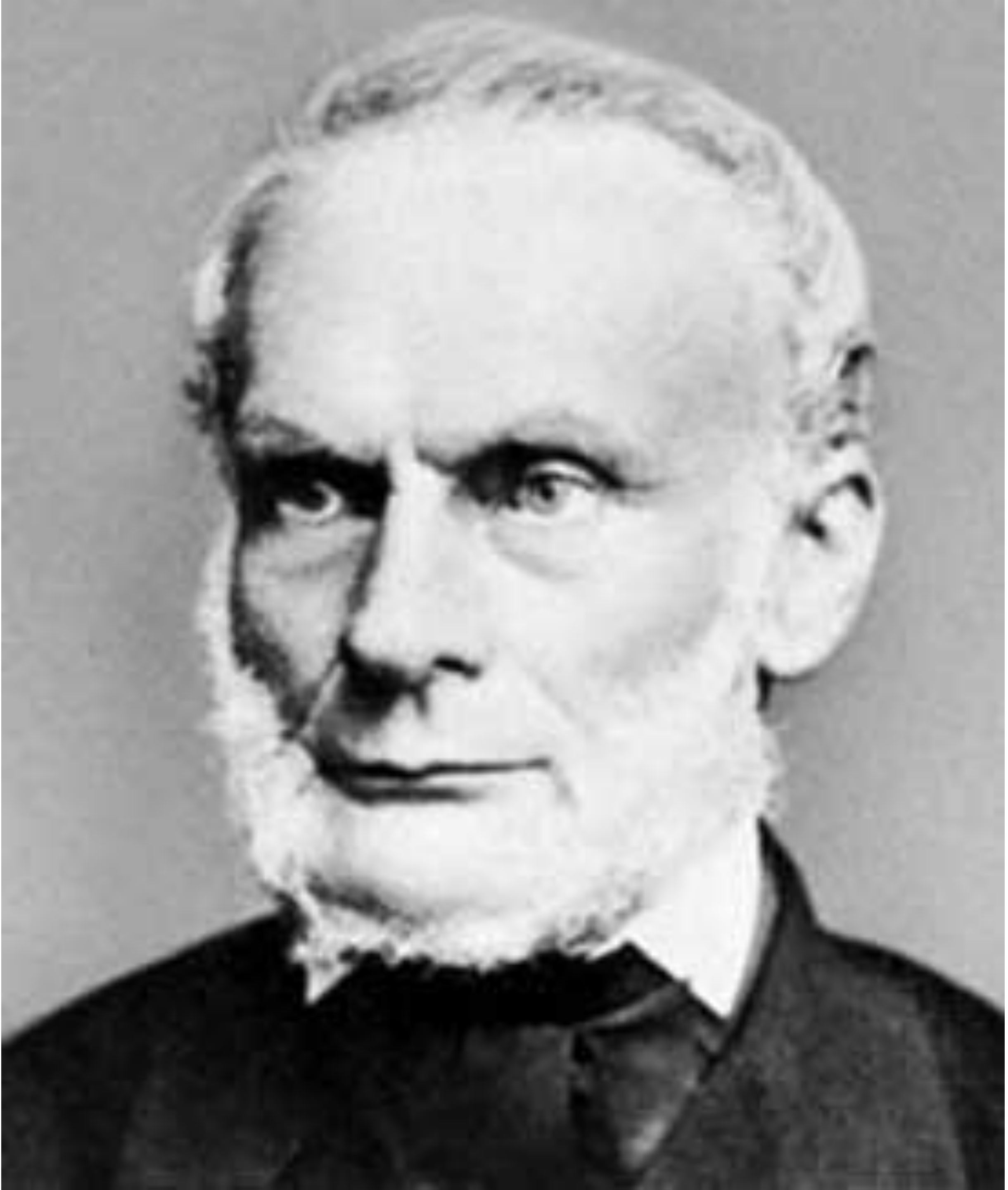
- **Information theory의 기반**

  Shannon의 정보이론: data compression, communication through noisy channel.

- 열역학적 entropy와 정보 entropy가 합쳐져서, 소위 **Maxwell's demon**이라는 역설을 풀 수 있음.

- IT from bit,

  IT from Qubit (Quantum bit)



Rudolf Clausius
(GER, 1822-1888)

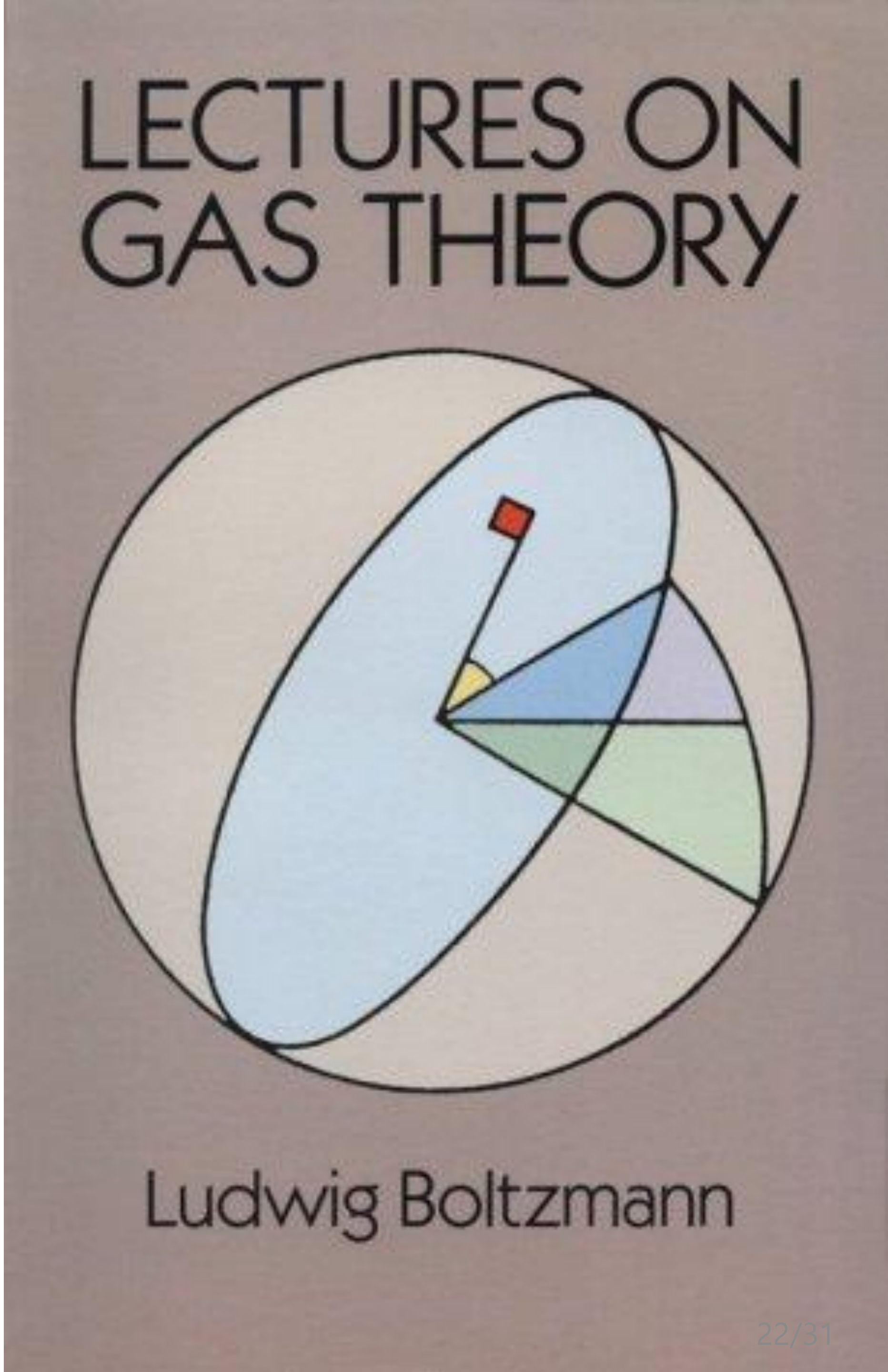
$$\Delta S = \int_{\mathrm{i}}^{\mathrm{f}} \frac{dq_{\mathrm{rev}}}{T}$$

Thermodynamic Entropy

$$\oint \frac{dq}{T} \leq 0$$

Clausius inequality


S = k log W
LUDWIG
BOLTZMANN


LECTURES ON
GAS THEORY
Ludwig Boltzmann

양자역학

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(x,t) \quad \text{(Schrodinger picture)}$$

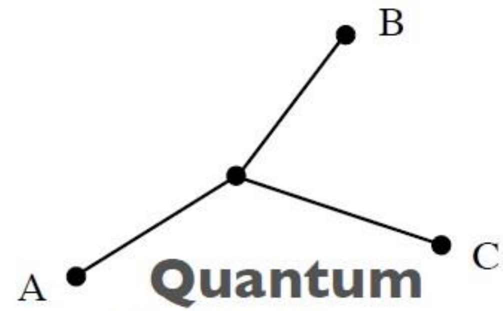
$$\frac{d\hat{O}_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{O}_H(t), \hat{H}] \quad \text{(Heisenberg picture)}$$

$$\Delta\Omega \cdot \Delta\Lambda \geq \hbar/2, \qquad [\Omega, \Lambda] = i\hbar$$

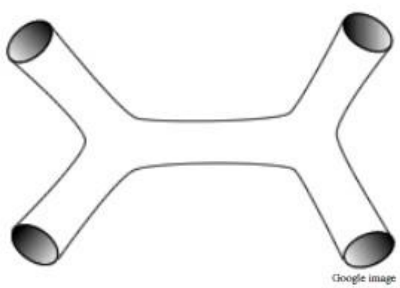
고전역학

양자역학

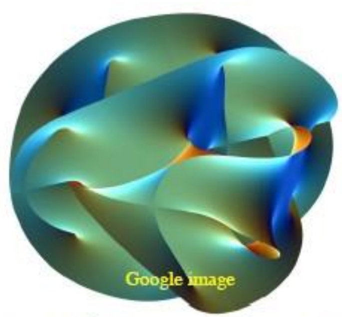
$$\sum_{\text{path}} e^{-i\mathcal{S}(\text{path})/\hbar}$$



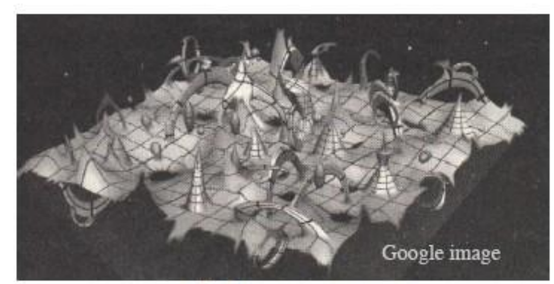
Quantum Field Theory



String



Quantum Gravity /Branes



Vacuum

→ **Casimir effect**

Bell Inequality

$$|\langle ab\rangle + \langle a'b\rangle + \langle a'b'\rangle - \langle ab'\rangle| \leq 2$$

- **양자역학**은 고전적으로 이해할 수 없다.
  양자정보이론
  $$S(\rho) = -\mathrm{tr}\rho\log\rho$$
  Quantum logic:
  소인수분해를 쉽게 할 수 있다. (P.W. Shor)
  (정보혁명)

- **Quantum Information Theory**는 궁극의 물리에서 주도적인 역할

SYMMETRY

- Lorentz group의 irreducible presentation이 spin과 mass에 의하여 parametrized 된다는 것을 발견 (**Wigner**; 노벨상)

- Discrete Symmetry ⟷ 결정구조

- Charge conjugation, parity, time reversal

  + ⟷ - x ⟷ -x t ⟷ -t

  우주는 CPT에 불변.

전자기학

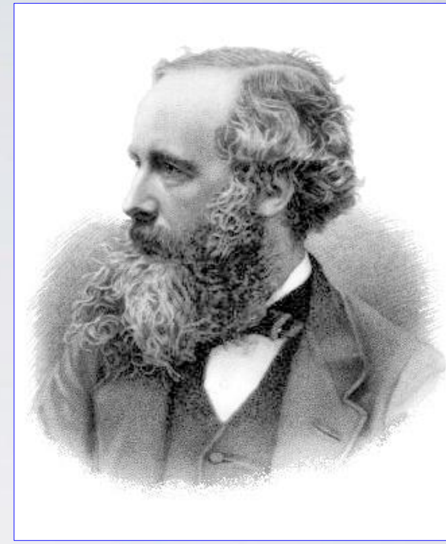
- Maxwell 방정식

$$\nabla \cdot D = \rho, \qquad \nabla \times H = \mathbf{J} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot B = 0, \qquad \nabla \times E = \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \tfrac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \tfrac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \end{aligned}}$$

$$\tfrac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2, \qquad D = \epsilon_0 E, \qquad H = \tfrac{1}{\mu_0} B$$



James Clerk Maxwell
(UK, 1831-1879)

- Maxwell 전에 $\frac{\partial D}{\partial t}$ 항을 제외하고 전부 알려졌음.

$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 이면 $\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$

$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 는 steady state 경우만 성립. 일반적으로는

전하보존 법칙

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\because\ \mathbf{J} = \rho \mathbf{V})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) = 0$$

$$\therefore\ \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{J} + \frac{\partial D}{\partial t}$$ 로.

양자전자기학(**QED**)은 U(1) Gauge 이론 (Weyl)

- 일반화 **Yang-Mills** gauge theory (non-abelian)
  $\longleftrightarrow$ **bundle 이론**

Weinberg-Salam standard theory:

$$\mathcal{L} = F^2 + \psi(i \not{D} + \varphi)\psi + (D\varphi)^2 + (|\varphi|^2 - 1)^2$$

Donaldson Theory, Seiberg-Witten, Gromov-Witten,

...

BLACK HOLE과 열역학

- 블랙홀은 질량에 반비례하는 온도를 가지고 **발광**한다. (S. Hawking)
- Black hole entropy가 겉면적에 비례 (따라서, 정보적 의미가 있다.)
- **Holographic principle**
- **AdS/CFT correspondence**
- Ryu-Takayanagi 정리 : entropy=area of minimal submanifolds
  - **information**과 **기하**를 연결

- **Partition function:**

$$Z = \sum_i e^{-E_i/kT}$$

- **Riemann zeta function:**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

의 유사성

- **리이만 가설** : $\zeta(s)$의 nontrivial zero의 imaginary part는 quantum chaos의 고유값에 대응된다.

RANDOM MATRIX

- Wigner; 무거운 '**핵**'에 대한 이론. 너무 복잡하면 random하다고 가정하는 것이 좋다.

- Riemann hypothesis

  Montgomery-Dyson

  리이만 제타 함수의 0 들이 random 행렬의 고유값 들과 같은 행동을 한다.

- **빛의 회절**과 **Fourier**

- Penrose의 **quasicrystal** (회절이 5각형 대칭을 가짐)
  (회절된 상에 δ 함수가 무한히 들어있다.)
  - Riemann 가설 (Bombieri-Taylor)
  - Shechtman의 합성

- 평면회전 $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 격자 ➡ 격자

$$\mathrm{tr} R_\theta \in \mathbf{Z},\ \ 2\cos\theta \in \mathbf{Z} \ \Rightarrow\ \theta = 0°,\ 60°,\ 90°,\ 120°,\ 180°$$

5각형 대칭은 안된다!

금융 수학

- Brownian motion $\rightarrow$ stochastic process
  (물이 분자로 이루어졌다.)

- Black-Scholes eq. :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

or $$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

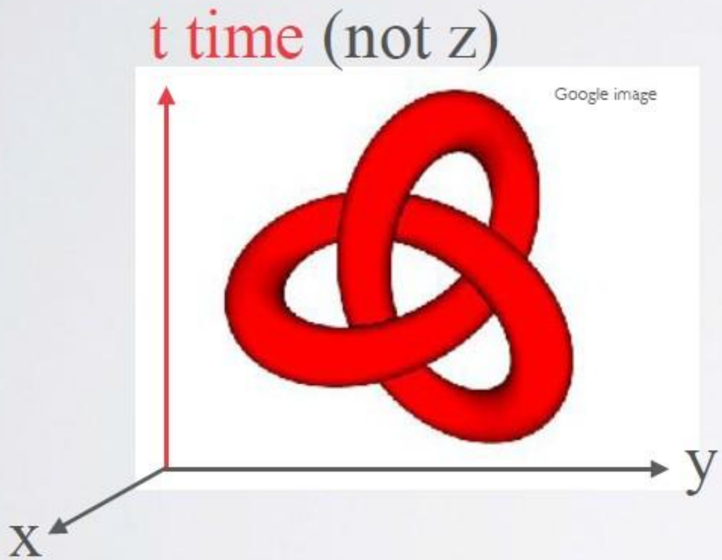
String theory는 geometry와 algebra의 합

- loop space
- Virasoro algebra
- genus expansion

- vector bundles
- K-theory
- moduli space
- non-commutative geometry

Quantum topology, knots, 3-manifolds, 4-manifolds, twistor.

non-commutative geometry, automorphic form, categorification.



의 quantum amplitude

Chern-Simons knot invariant

$J_k = \langle W_k \rangle$ $\quad W_k$: Wilson operator

- particle moving on a knot in 3-dimensional 시공간

generalized to
Khovanov homology

궁극 세계 (거리 $\leq 10^{-33}$cm, 시간 $< 10^{-43}$sec)

- 시공간 개념이 없어짐 (바로 uncertainty principle)

  따라서, 물리법칙이 사라짐.

  새로운 수학, 새로운 물리에서부터 시공간과 양자역학을 얻어낼 수 있어야 함.

Quantum Geometry	**Amplituhedron**
Quantum Information Theory **로부터**	**positive Grassmannian** **을 도구로**

random matrix

→ semicircle law

Algebra에서부터 (혹은 Combinatorics로부터) Geometry를

◆ QUANTUM GEOMETRY (가상)

- **Quantum Information Theory를 기반으로**

  Quantum Gravity, String Theory, Algebraic Geometry, Conformal Field Theory, Riemannian Geometry, Moduli Space, Riemann Surface 등 궁극의 물리와 관련된 수학, 물리를 다 아우르는 새로운 수학, 새로운 물리

- **IT from Qubit.**

◆ **AMPLITUHEDRON**

(mainly, Nima Arkani-Hamed (IAS))

- **Positive Grassmannian에 기반한 시도로서,** 시공간 뿐만아니라 Quantum Mechanics도 구현하려 함.

◆ 미해결 문제

- **리이만 가설**

- High Temperature (HiTc) **Superconductivity**

  아마 **새로운 수학, 새로운 물리가 답을 줄 수도...**

수학, 물리학 같이 가야한다.

우주를 다스리는 방정식들

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad \mathbf{G} = -\frac{G_N M m}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\bar{t} = \gamma(t - \tfrac{vx}{c^2})$$

$$\bar{x} = \gamma(x - vt) \qquad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

$$\bar{y} = y \qquad \beta = v/c$$

$$\bar{z} = z$$

$$E = \gamma m c^2$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(x,t)$$

$$\frac{d\hat{O}_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{O}_H(t), \hat{H}]$$

$$\Delta\Omega \cdot \Delta\Lambda \geq \hbar$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \cdot R + \Lambda \cdot g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$$\int D[\phi(x)] \cdot e^{i\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{L}[\phi(x)]}$$

$$g = 2(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \cdots)$$

$$\mathcal{L} = F^2 + \psi(i \not{D} + \varphi)\psi + (D\varphi)^2 + (|\varphi|^2 - 1)^2$$

$$\frac{dS}{dT} \geq 0$$

감사합니다…